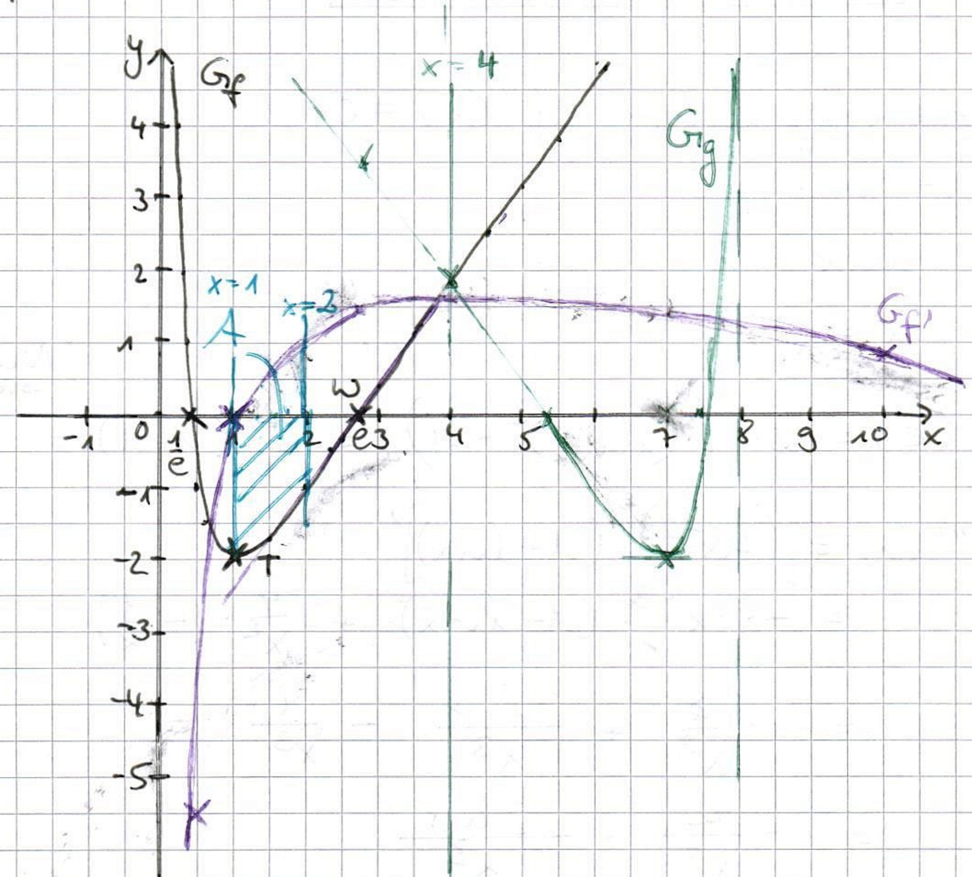
Abitur 2018 – B1 – ANALYSIS

$D_f = \mathbb{R}^+$

$f: x \mapsto 2 \cdot [(\ln x)^2 - 1]$



Aufgabe 1

a) $f(x) = 0 \iff (\ln x)^2 - 1 = 0$

$\iff (\ln x)^2 = 1$

$\iff \ln x = \pm 1 \quad | \, e$

$\iff x = e^{\pm 1}$

$\underline{\underline{x_1 = e}}\ ; \ \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{e}}}$

$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x} \cdot \ln x$

$f'(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

$f(1) = 2 \cdot [(\ln 1)^2 - 1] = 2 \cdot (-1) = -2$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} \ln x + \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{4}{x^2} (1 - \ln x)$

$f''(1) = 4 \cdot (1-0) = 4 > 0 \Rightarrow$ G_f linksgekr. *

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T(1|-2) \text{ Tiefpunkt}}}$

b) Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

(Nullstelle, siehe a))

$f(e) = 2 \cdot ((\ln e)^2 - 1) = 2 \cdot (1-1) = 0$

$f'''(x) = \left[(4x^{-2}) \cdot (1 - \ln x)\right]'$

$= -8 \cdot x^{-3} \cdot (1 - \ln x) + \frac{4}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{8}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3} - \frac{4}{x^3} =$

$= -\frac{12}{x^3} + \frac{2 \ln x}{x^3}$

$f'''(e) = -\frac{12}{e^3} + \frac{2}{e^3} = -\frac{10}{e^3} < 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{W(e|0) \text{ Wendepunkt}}}$

Wendetangente: $w: x \mapsto mx + t$

$m = f'(e) = \frac{4}{e} \cdot \ln e = \frac{4}{e}$

$y = \frac{4}{e} x + t$

$W(e|0) \in w$: $0 = \frac{4}{e} \cdot e + t$

$\Leftrightarrow t = -4$

$\underline{\underline{w: x \mapsto \underbrace{\tfrac{4}{e}}_{\approx 1{,}47} x - 4}}$

Abi 2018 – B1 – ANA – FS 2

1c) $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{x} \ln x = 4 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} =$

$= 4 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{-\infty} = \underline{\underline{-\infty}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 4 \cdot \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Merkhilfe

$f'(0{,}5) = \frac{4}{0{,}5} \cdot \ln 0{,}5 \approx -5{,}5$

$f'(10) = \frac{4}{10} \cdot \ln 10 \approx 0{,}9$

d) $c \in]0;6]$; $\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\,dx$

1) $c_1 = e^{-1}$ (obere Grenze = untere Grenze)

2) $F(e) = \int_{e^{-1}}^{e} f(x)\,dx < 0$ Fläche unterhalb der x-Achse negativ

Für $e < x < 6$ liegen die Funktionswerte von f oberhalb der x-Achse
$\Rightarrow$ der Wert für F(c) nimmt zu

Da die Fläche, die rechts von e von G_f und der x-Achse eingeschlossen wird, größer ist als die Fläche zwischen G_f und x-Achse zwischen e^{-1} und e, gibt es einen Wert, für den das Integral 0 ist.

$h: x \mapsto 1{,}5x - 4{,}5 + \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1{,}5x - 4{,}5 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (1{,}5x - 4{,}5)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = 1{,}5x - 4{,}5 \text{ ist schräge Asymptote}}}$

$$\lim_{x \searrow 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \Big(\underbrace{1{,}5x}_{\to 0} - 4{,}5 + \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to \infty} \Big) = \infty$$

$$\lim_{x \nearrow 0} h(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = 0}}$ (y-Achse) ist $\underline{\underline{\text{senkrechte Asymptote}}}$.

f) $$\tilde{A} = \left| \int_1^2 (1{,}5x - 4{,}5 + \tfrac{1}{x})\,dx \right|$$

$$= \left| \left[0{,}75x^2 - 4{,}5x + \ln x \right]_1^2 \right|$$

$$= | 0{,}75 \cdot 4 - 9 + \ln 2 - 0{,}75 + 4{,}5 - \ln 1 |$$

$$= | 3 - 9 + 3{,}75 + \ln 2 |$$

$$= | -2{,}25 + \ln 2 |$$

$$= 1{,}557$$

$A = 1{,}623$

$$\frac{1{,}623 - 1{,}557}{1{,}623} \approx 0{,}041 = \underline{\underline{4{,}1\%}}$$

Aufgabe 2

a) s. Grafik

b) Spiegelung an der y-Achse : $h(-x)$

Dann Verschiebung um 8 nach rechts

$h(-(x-8))$, $D_g =]-\infty; 8[$

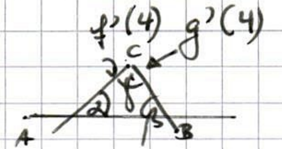
$= h(-x+8)$

$0{,}2 \leq x \leq 4$ von G_f

$4 < x \leq 7{,}8$ von G_g

Abi 2018 – B1 – ANA – FS 3

2c)



$f'(4) = \frac{4}{4} \cdot \ln 4 = \ln 4$

$\tan\alpha = \ln 4 \iff \alpha \approx 54{,}2°$

Da $\triangle ABC$ gleichschenklig ist, ist auch $\beta = 54{,}2°$

$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 54{,}2° = \underline{\underline{71{,}6°}}$

d) $f(0{,}2) = 2 \cdot \left((\ln 0{,}2)^2 - 1 \right) = 3{,}18$

Tiefpunkt $(1 | -2)$

$\Rightarrow$ Wassertiefe maximal

$3{,}18 + 2 = \underline{\underline{5{,}18}}$ <u>Meter</u>

e) $24 \cdot \int_{0{,}2}^{4} \left(f(0{,}2) - f(x) \right) dx$

$V = G \cdot h$

$G \mathrel{\hat{=}}$ Vorderseite, $h = 12\,m$

$G = 2 \cdot G'$

Fläche zwischen 0,2 und 4

zwischen Graphen und Oberkante $y = f(0{,}2)$

$G = 2 \cdot \int_{0{,}2}^{4} [f(0{,}2) - f(x)]\, dx$

$V = G \cdot h = 2 \cdot \int_{0{,}2}^{4} [f(0{,}2) - f(x)]\, dx \cdot 12$

$= 24 \cdot \int_{0{,}2}^{4} [f(0{,}2) - f(x)]\, dx$