Abitur 2016 – B1 – GEO

Aufgabe 1

$A(6|3|3)$, $B(3|6|3)$, $C(3|3|6)$

ΔABC gleichseitig

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$; $\quad \vec{n} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6+3+3 = 12$

$E: \; x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$

b) $Z(3|3|3)$

Alle 3 Punkte haben dieselbe x_3-Koordinate, nämlich $x_3 = 3$. Sie liegen deshalb in der zur x_1x_2-Ebene parallelen und um 3 verschobenen Ebene $F: x_3 = 3$

zu zeigen $[CC'] \perp F$

also zu zeigen $[CC'] \parallel \vec{n}_F$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(c_3 = 0)$

$\vec{c}\,' = \vec{c} + \overrightarrow{CZ} + \overrightarrow{CZ} = \vec{c} + 2\overrightarrow{CZ}$

$\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

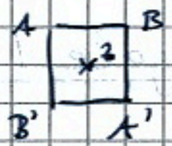
$\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 \cdot \vec{n}_F$

q.e.d.

c) z.z. $\square ABA'B'$ Quadrat mit $a = 3\sqrt{2}$

also z.z.

die Diagonalen $[AA']$ und $[BB']$ halbieren sich und stehen senkrecht aufeinander.



Da A' und B' durch Spiegelung von A und B an Z entstehen, gilt $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{ZA'}$ und $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{ZB'}$ und die beiden Diagonalen schneiden sich im Punkt Z. Folglich halbieren sich die Diagonalen.

Wenn gilt $\overrightarrow{AZ} \perp \overrightarrow{BZ}$, stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

$$\overrightarrow{AZ} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BZ} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AZ} \circ \overrightarrow{BZ} = -3 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$$

d) z.z. $V = 36$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \cdot 2$$

$$\overrightarrow{ZC} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad |\overrightarrow{ZC}| = \sqrt{9} = 3 = h$$

$$G = |\overrightarrow{AB}|^2 = 18$$

$$V = \frac{2}{3} \cdot 18 \cdot 3 = \underline{\underline{36}}$$

Abi 2016 – B1 – GEO – FS

e) Normalenvektor von $ABC = \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von $ABC' = \vec{n}_H = \ldots$

$\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_H$

$\sphericalangle(E;H) = \sphericalangle(\vec{n}_E; \vec{n}_H)$

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_H}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_H|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} =$

$= \dfrac{1+1-1}{3} = \dfrac{1}{3}$; $\alpha = 70{,}5°$

$180° - 70{,}5° = \underline{\underline{109{,}5°}}$

Der Winkel zwischen den Seitenflächen beträgt 109,5°.

f) Radius der Kugel: $|\overrightarrow{ZC}| = 3$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi = 36\pi$
$= 113{,}1$

Anteil: $\dfrac{36}{36\pi} = \dfrac{1}{\pi} = 0{,}318 = \underline{\underline{31{,}8\%}}$

Kugelgleichung: $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 9$