Abitur 2016 – B1 – ANALYSIS

Aufgabe 1

$f: x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$, $D_f = \mathbb{R}$

a) SP mit y-Achse: $f(0) = e^0 + e^0 = 2$ $\quad T(0|2)$

Da $e^x > 0$ für alle x, sind sowohl $e^{\frac{1}{2}x}$ als auch $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ und damit auch die Summe aus beiden.

b) Symmetrie: $f(-x) = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}x} = \infty = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} \\ \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \underline{\underline{= +\infty}} \end{array}$$

c) $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \frac{1}{4} f(x)$

Da $f(x) > 0$ für alle x, so ist auch $\frac{1}{4} f(x) = f''(x) > 0$ für alle x

$\Rightarrow$ G_f linksgekrümmt

d) Extrempunkt: $f'(x) = 0$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) = 0 \quad | \cdot 2, + e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \quad | \ln$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x \quad | \cdot 2$$

$$x = -x$$

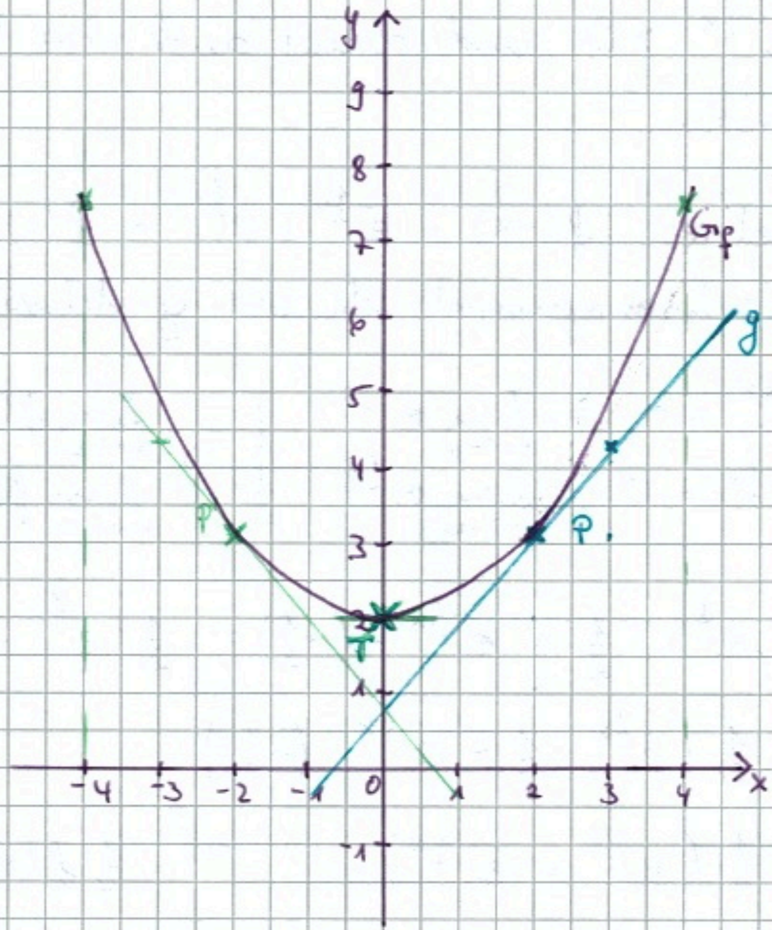
$$x = 0$$

Da G_f linksgekrümmt ist $\underline{T(0|2)}$ ein $\underline{\text{Tiefpunkt}}$.

e) $P(2|3{,}1)$

$f(2) = e + e^{-1} = e + \frac{1}{e} \approx \underline{3{,}1}$

$m_g = f'(2) = \frac{1}{2} \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right) \approx \underline{\underline{1{,}2}}$



f) $f(4) = e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = e^2 + \frac{1}{e^2} \approx \underline{7{,}52}$

g) zu zeigen: $\frac{1}{4}\left[f(x)\right]^2 - \left[f'(x)\right]^2 = 1$

$\frac{1}{4}\left[e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]^2$

$= \frac{1}{4}\left(e^x + 2e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^x - 2e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(4e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)$

$= e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = e^0 = \underline{1}$ q.e.d.

Abi 2016 – B1 – ANA – FS – 1

$$L_{a;b} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$A(0;2)$; $B(b\,/\,f(b))$

$$L_{a;b} = \int_0^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

aus 1g) : $[f'(x)]^2 = \frac{1}{4}[f(x)]^2 - 1$

$$L_{a;b} = \int_0^b \sqrt{1+\frac{1}{4}[f(x)]^2-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[2e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^b$$

$$= \left[e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^b$$

$$= \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}}}$$

Aufgabe 2

$F_1(-4|0)$, $F_2(4|0)$

a) Durchhang $= f(4) - f(0) = 7{,}52 - 2 = 5{,}52$

Der Durchhang beträgt $\underline{\underline{552\text{ cm}}}$.

b) Der gesuchte Winkel ε ist der Winkel zwischen der Tangente im Punkt $(4/7{,}52)$ und der Senkrechten.

$m_t = f'(4) = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) = 3{,}63$

$\tan\alpha = e^2 - \frac{1}{e^2}$; $\alpha = 74{,}6°$

$\varepsilon = 90° - 74{,}6° = \underline{\underline{15{,}4°}}$

$$L_{-4;4} = 2 \cdot L_{0;4} = 2 \cdot \left(e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}\right) = 2 \cdot \left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \underline{\underline{= 14{,}51}}$$

Der Winkel beträgt 15,4°, die Seillänge 14,51 m.

c) $q(x) = a \cdot x^2 + 2$

$q(4) = 16a + 2 = e^2 - \frac{1}{e^2} \Rightarrow a = \frac{1}{16}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} - 2\right)$

$$\underline{\underline{q(x) = \frac{1}{16}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} - 2\right)x^2 + 2}}$$

d) Der Abstand der Graphen entspricht der Differenz der Funktionswerte $q(x) - f(x) = d(x)$. Die Differenz wird maximal für $d'(x) = 0$. Man berechnet also die Ableitung $d'(x)$, setzt $d'(x) = 0$, berechnet die Nullstellen von d' und entscheidet aus der Monotonie, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt. Für die x-Werte der Hochpunkte muss man dann $d(x)$ berechnen. Der größte sich ergebende Wert von $d(x)$ gibt den größten Abstand der Graphen an.