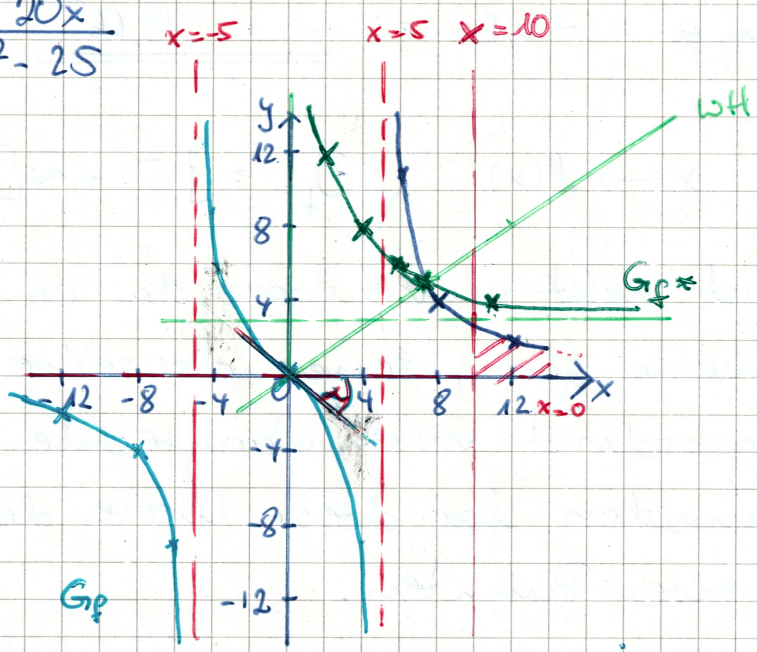
Abitur 2014 – B2 – ANALYSIS

$$f(x) = \frac{20x}{x^2-25}$$



9

Aufgabe 1

a) $x^2-25=0 \iff x^2=25 \iff x_1=5\,;\ x_2=-5$

$\Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5;5\}}}$

$$f(-x) = \frac{20\cdot(-x)}{(-x)^2-25} = -\frac{20x}{x^2-25} = -f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ <u>punktsymmetrisch zum Ursprung</u>

$f(x)=0 \iff 20x=0 \iff \underline{\underline{x=0}}$ Nullstelle

Asymptoten:

$x=-5$ und $x=5$ sind senkrechte Asympt.

$y=0$ ist waagrechte Asymptote (Nennergrad größer Zählergrad)

b) $$f'(x) = \frac{20\cdot(x^2-25)-20x\cdot 2x}{(x^2-25)^2} = \frac{20x^2-500-40x^2}{(x^2-25)^2}$$

$$= \frac{-20x^2-500}{(x^2-25)^2} = \underbrace{-20}_{<0}\cdot\underbrace{\frac{x^2+25}{(x^2-25)^2}}_{>0} < 0 \text{ für alle } x \in D_f$$

$$f'(0) = -20 \cdot \frac{25}{25^2} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = -0{,}8 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 38{,}66^\circ}}$$

d) $f^*: x \mapsto f(x)$, $D_{f^*} =]5; +\infty[$

f ist nicht umkehrbar, da es verschiedene x-Werte gibt, denen derselbe y-Wert zugeordnet wird. Waagrechte Gerade schneiden für diese Werte den Graphen in zwei Punkten.
f^* ist im zugehörigen Definitionsbereich streng monoton fallend und deshalb umkehrbar.

e) $$A(s) = \int_{10}^{s} f(x)dx = \int_{10}^{s} \frac{20x}{x^2-25}\,dx = 10 \cdot \int_{10}^{s} \frac{2x}{x^2-25}\,dx$$

$$= 10 \cdot \left[\ln(x^2-25)\right]_{10}^{s}$$

$$= 10 \cdot \ln(s^2-25) - 10 \cdot \ln 75$$

$$\underline{\underline{= 10 \cdot \ln \frac{s^2-25}{75}}}$$

f) $$A(s) = 100 \Leftrightarrow \ln \frac{s^2-25}{75} = 10$$

$$\frac{s^2-25}{75} = e^{10}$$

$$s^2 - 25 = 75e^{10}$$

$$\underline{\underline{s = (\pm)\sqrt{75e^{10}+25}}}$$ (nur positive Lösung liegt rechts von 10)

$$s \approx 1285{,}3$$

g) $$\lim_{s \to \infty} A(s) = \lim_{x \to \infty} 10 \cdot \ln \frac{s^2-25}{75} = \underline{\underline{+\infty}}$$

Aufgabe 2

$l = 10\text{ km}$

x: Eigengeschwindigkeit des Bootes in $\frac{km}{h}$

$c = 5\frac{km}{h}$ Geschwindigkeit des Wassers

$x > 5$

Gesamtfahrzeit $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5}$

a) $x_1 = 10\frac{km}{h}$ $\quad t(10) = \frac{10}{15} + \frac{10}{5} = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}$

$t_1 = 2\frac{2}{3}\text{ h} = 2\text{ h }40\text{ min} = \underline{\underline{160\text{ min}}}$

$x_2 = 20\frac{km}{h}$ $\quad t(20) = \frac{10}{25} + \frac{10}{15} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$

$t_2 = 1\frac{1}{15}\text{ h} = 1\text{ h }4\text{ min} = \underline{\underline{64\text{ min}}}$

b) $\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ für Bewegung mit konstanter Geschw.

$\Rightarrow \text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$

Die Strecke beträgt jeweils 10 km → Zähler
Die Geschwindigkeit ist auf dem Hinweg die Summe aus Eigengeschw. des Bootes und der Geschw. des Wassers, da sie gleichgerichtet sind, auf dem Rückweg die Differenz der beiden, da sie entgegengesetzt gerichtet sind.

c) Für $0 < x < 5$ wäre die Eigengeschw. des Bootes kleiner als die Fließgeschw. des Wassers. Das Boot könnte deshalb nicht zurück flussaufwärts fahren, sondern würde weiter flussabwärts getrieben werden.

d) $t(x) = \frac{10}{x+5} + \frac{10}{x-5} =$

$= \frac{10 \cdot (x-5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{10 \cdot (x+5)}{(x-5)(x+5)}$

$= \frac{10x - 50 + 10x + 50}{x^2 - 25}$

$= \frac{20x}{x^2 - 25} = f(x)$

e) $t(x) = 4$

$\frac{20x}{x^2-25} = 4 \iff 20x = 4x^2 - 100$

$\iff 0 = 4x^2 - 20x - 100 \quad | :4$

$\iff 0 = x^2 - 5x - 25$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 100}}{2} = \frac{5 + \sqrt{125}}{2} \approx 8{,}09$

Die Eigengeschwindigkeit des Bootes würde $7{,}62 \frac{km}{h}$ betragen.

Da die Fahrzeit $t(x)$ dem y-Wert $f(x)$ des Graphen entspricht, sucht man auf der y-Achse den Wert der Gesamtfahrzeit, geht nach rechts zum Graphen und liest auf der x-Achse den zugehörigen x-Wert ab. Dieser gibt die Eigengeschwindigkeit des Bootes an.