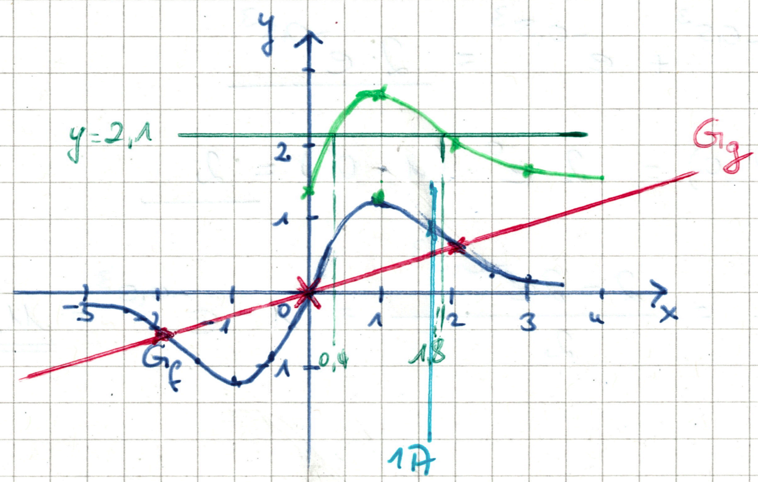
Abitur 2013 – I | 2 – ANALYSIS

$f: x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2}$



Aufgabe 1

a) $f(-x) = 2 \cdot (-x) \cdot e^{-0,5 \cdot (-x)^2} = -2x\, e^{-0,5x^2} = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f punktsymmetrisch zum Ursprung

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot e^{-0,5x^2} = 2 \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{0,5x^2}} = 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

b) $f'(x) = 2 \cdot \left[1 \cdot e^{-0,5x^2} + x \cdot e^{-0,5x^2} \cdot (-x)\right]$

$= 2 \cdot e^{-0,5x^2} \cdot (1 - x^2)$

$= 2 \cdot e^{-0,5x^2} \cdot (1-x) \cdot (1+x)$

$f'(x) = 0$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

$f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-0,5} = \frac{2}{\sqrt{e}}$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-0,5} = \frac{-2}{\sqrt{e}}$

$f''(x) = 2 \cdot \left[-x \cdot e^{-0,5x^2} \cdot (1-x^2) + e^{-0,5x^2} \cdot (-2x)\right]$

$= 2\, e^{-0,5x^2} \left(-x + x^3 - 2x\right)$

$= 2x\, e^{-0,5x^2} \cdot (x^2 - 3)$

$f''(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-0,5} \cdot (1-3) < 0 \Rightarrow \underline{H(1 \mid \frac{2}{\sqrt{e}})\ \text{Hochpunkt}}$

$f''(-1) = 2 \cdot (-1) \cdot e^{-0,5} \cdot (1-3) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{T(-1 \mid -\frac{2}{\sqrt{e}})\ \text{Tiefpunkt}}}$

Aufgabe 3

$g_{1,4}: x \mapsto 2x \cdot e^{-0,5x^2} + 1,4$ $\qquad$ $1955 = x_0$

$1 \hat{=} 10a$

a) aus dem Diagramm: $0,4 \leq x \leq 1,8$

$\downarrow 4a \qquad \downarrow 18a$

Von 1959 bis 1973 betrug die Geburten-ziffer mindesten 2,1.

b) Die Geburtenziffer wird künftig weiter abnehmen und ~~sich~~ auf den Wert 1,4 absinken.

c) stärkste Abnahme: $x = 1,7$, also im Jahr 1972.

Man müsste mit Hilfe der 2. Ableitung den Wendepunkt berechnen, also den Punkt, für den links von seiner x-koordinate die Steigung immer mehr abnimmt, bis das Gefälle im Wendepunkt maximal wird, und für den rechts von seiner x-Koordinate die Abnahme zurückgeht.

c) m_S in $[-0{,}5;0{,}5]$:

$$m_S = \frac{f(0{,}5)-f(-0{,}5)}{0{,}5-(-0{,}5)} = \frac{2\cdot 0{,}5\cdot e^{-0{,}5\cdot 0{,}5^2} + 2\cdot 0{,}5\cdot e^{-0{,}5\cdot(-0{,}5)^2}}{1}$$

$$= e^{-0{,}5^3} + e^{-0{,}5^3} = \underline{2\cdot e^{-0{,}5^3}}$$

$$m_T = f'(0) = 2\cdot e^0\cdot(1-0^2) = \underline{2}$$

$$\frac{m_T - m_S}{m_T} = \frac{2-2e^{-0{,}5^3}}{2} = 1-e^{-0{,}5^3} = \underline{\underline{11{,}75\%}}$$

d) $0 \leqq x \leqq u$

$$A(u) = \int_0^u \left(2t\cdot e^{-0{,}5t^2}\right)dt = 2\cdot\int_0^u t\cdot e^{-0{,}5t^2}\,dt$$

$$= 2\left[-e^{-0{,}5t^2}\right]_0^u$$

$$\left(\text{denn } \left(-e^{-0{,}5t^2}\right)' = -e^{-0{,}5t^2}\cdot(-t) = t\cdot e^{-0{,}5t^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{-2e^{-0{,}5u^2}+2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} A(u) = -2\left(\lim_{u\to+\infty} e^{-0{,}5u^2}\right) + 2 = -2\cdot 0 + 2 = \underline{\underline{2}}$$

Die Fläche $A(u)$ ist für $u\to\infty$ beschränkt, obwohl sie sich ins Unendliche erstreckt und hat den endlichichen Flächeninhalt 2.

e) g: $y = \frac{2}{e^2}\cdot x$, $x \geqq 0$

$$g \cap f = \{S_1, S_2, S_3\}$$

$$\frac{2}{e^2}\cdot x = 2x\cdot e^{-0{,}5x^2} \quad ; \quad \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$e^{-2} = e^{-0{,}5x^2} \quad |\ln$$

$$2 = 0{,}5x^2 \qquad \underline{\underline{x_2 = 2}};\ \underline{\underline{x_3 = -2}}$$

FS 1e)

$$B = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^2 \left(2x e^{-0,5x^2} - \frac{2}{e^2} x\right) dx$$

$$= \left[-2 e^{-0,5x^2} - \frac{1}{e^2} x^2\right]_0^2 = -2 \cdot e^{-0,5 \cdot 4} - \frac{1}{e^2} \cdot 4 + 2 + 0$$

$$= 2 - 2e^{-2} - 4e^{-2} = 2 - 6e^{-2} \approx \underline{\underline{1,188}}$$

Aufgabe 2

$g_c : x \mapsto f(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

a) Hochpunkt $H\left(1 \mid \frac{2}{\sqrt{e}} + c\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + c) = 0 + c = c$

b) α: keine Nullstelle : $c = 10$

β: genau eine Nullstelle : $c = 0$

γ: genau zwei Nullstellen : $c = 1$

c) z.z. $\int_0^3 g_c(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + 3c$

$= A(3) + 3 \cdot c$