Abitur 2013 – GEOMETRIE – I – B2

Aufgabe 1

a) $B(12|12|0)$

$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12m)^2 \cdot 8m = \underline{384 m^3}$

b) $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = 0$

$\vec{SC} = \vec{c} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{SB} = \vec{b} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{SC} \times \vec{SB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ 12+12 \\ 9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 - 6 \\ x_3 - 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot (x_2 - 6) + 3 \cdot (x_3 - 8)$

$= 4x_2 + 3x_3 - 24 - 24$

$= \underline{\underline{4x_2 + 3x_3 - 48 = 0}}$

c) Mittelpunkt M:

$\vec{m} = \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BD}$

$\vec{m} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 - 12 \\ 0 - 12 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{M(6|6|0)}$

Abstand $d(M; E)$

$g: \vec{x} = \vec{m} + \lambda \cdot \vec{n}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$g \cap E = \{F\}: \quad 0 \cdot (6 + 0\lambda) + 4 \cdot (6 + 4\lambda) + 3 \cdot (0 + 3\lambda) - 48 = 0$

$24 + 16\lambda + 9\lambda - 48 = 0$

$25\lambda = 24$

$\lambda = \frac{24}{25} = 0{,}96$

in g: $\vec{f} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + 0{,}96 \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9{,}84\\2{,}88\end{pmatrix}$

$\underline{F(6/9{,}84/2{,}88)}$

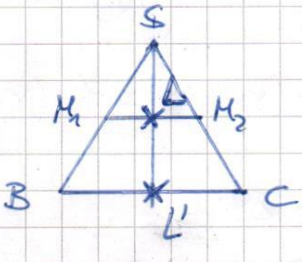
Die Strebe wird 2,88 m über der Grundfläche befestigt.

d) $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$\vec{m_1} = \vec{s} + \frac{1}{2} \cdot \vec{SB} = \begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\9\\4\end{pmatrix}$

$\vec{m_2} = \vec{s} + \frac{1}{2} \cdot \vec{SC} = \begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot (-2) \begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\4\end{pmatrix}$

$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(9-3)^2 + (9-9)^2 + (4-4)^2} = 6$



$\vec{l} = \vec{m_1} + \frac{1}{2} \cdot \vec{M_1M_2}$

$= \begin{pmatrix}9\\9\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}3-9\\9-9\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\\4\end{pmatrix}$

$\underline{L(6/9/4)}$

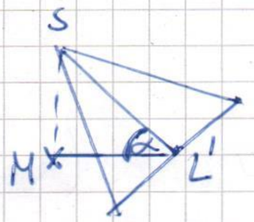
$\vec{SL} = \begin{pmatrix}6-6\\9-6\\4-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$

$|\vec{SL}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = \underline{15}$

Der Flächeninhalt beträgt 15 m².

e)



$L'(6/12/0)$

(einfacher: $\overline{SL'} = 2 \cdot \overline{SL} = 2 \cdot 5$)

$\cos\alpha = \frac{\overline{ML'}}{\overline{SL'}}$

$\overline{SL'} = |\vec{SL'}| = \left|\begin{pmatrix}6-6\\12-6\\0-8\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\-8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+36+64} = 10$

Abi 2013 – B2 – GEO – FS – 2

zu 1e) $\cos\alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{53{,}1°}}$

aus der Tabelle: Das entspricht ca. 97% der maximalen Leistung.

Aufgabe 2

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $g \cap h = \{T\}$

$\text{I)}\quad 8 + 3\lambda = -1 + \mu \qquad 9 + 3\lambda = \mu$

$\text{II)}\quad 1 + \lambda = 5 - 2\mu \qquad -4 + \lambda = -2\mu$

$\text{III)}\quad 7 + 2\lambda = -9 + 4\mu \qquad 16 + 2\lambda = 4\mu \quad | :4$

$4 + 0{,}5\lambda = \mu$

$\text{I} = \text{III})\quad 9 + 3\lambda = 4 + 0{,}5\lambda$

$2{,}5\lambda = -5$

$\lambda = -2$

in I) $9 - 6 = \mu$

$\mu = 3$

Probe in II) $1 - 2 = 5 - 6$ ✓

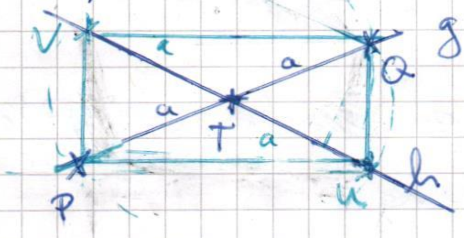
$T: \vec{t} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{T(2 \mid -1 \mid 3)}}$

b) $P, Q \in g$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also $P(5|0|5)$ und $Q(-1|-2|1)$

c) $U, V \in h$



Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang und schneiden sich in ihrem Mittelpunkt Deshalb liefert $k(T, |\overrightarrow{PT}|) \cap h$ die Punkte U und V.

Dafür muss man den Radius $a = |\overrightarrow{TP}|$ ermitteln,
dann das Verhältnis $a = b \cdot |\vec{v}|$,
also $b = \frac{a}{|\vec{v}|}$, wobei $\vec{v}$ der Richtungsvektor von h ist.

Dann gilt: $\underset{\sim}{\vec{u}} = t + b \cdot \vec{v}$ und

Ortsvektor von U $\underset{\sim}{\vec{v}} = t - b \cdot \vec{v}$

Ortsvektor von V