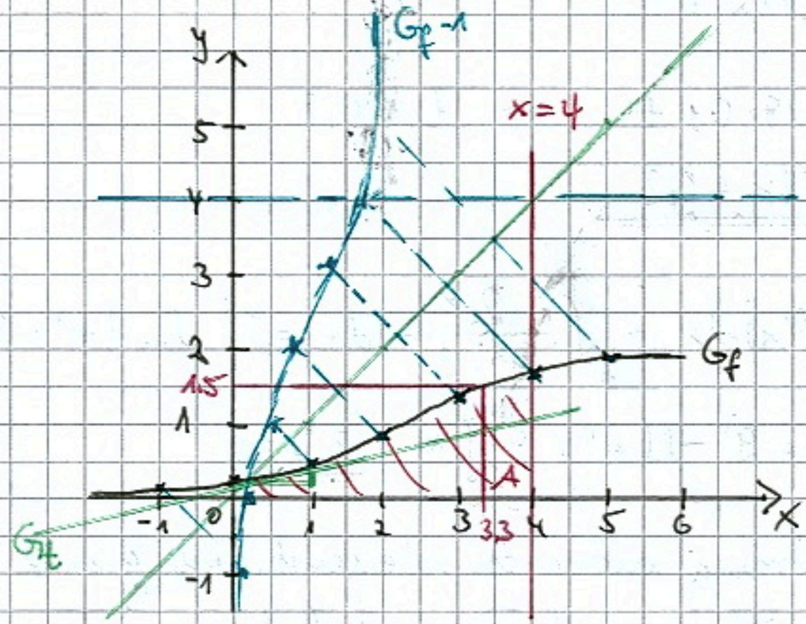
Abitur 2012 – Analysis I – Teil 2

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 9} \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$



Aufgabe 1

a) Schnittpunkte mit den Achsen

- Kein Schnittpunkt mit der x-Achse, da $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9} > 0$ für alle x
- Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = \frac{2e^0}{e^0 + 9} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \qquad \underline{\underline{S(0\,|\,0{,}2)}}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x \cdot 2}{e^x \cdot \left(1 + \frac{9}{e^x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1 + \underbrace{\frac{9}{e^x}}_{\to 0}} = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1 + \underbrace{\frac{9}{e^x}}_{\to\infty}} = \underline{\underline{0}}$$

c) $$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+9) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+9)^2} = \frac{2(e^x)^2 + 18e^x - 2(e^x)^2}{(e^x+9)^2} =$$

$$= \frac{\overbrace{18e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x+9)^2}_{>0}} > 0 \quad \text{für alle } x \in D_f \Rightarrow G_f \text{ ist in}$$

$\mathbb{R}$ $\underline{\underline{\text{streng monoton steigend.}}}$

d) $t: y = mx + t$

$$m = f'(0) = \frac{18e^0}{(e^0+9)^2} = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

$$y = 0{,}18x + t$$

$$0{,}2 = 0{,}18 \cdot 0 + t \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}2$$

$t:$ $\underline{\underline{y = 0{,}18x + 0{,}2}}$

e) $$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{2e^x}{e^x+9}\,dx = 2\left[\ln|e^x+9|\right]_0^4 =$$

$$= 2 \cdot \left[\ln(e^4+9) - \ln(e^0+9)\right] \approx \underline{\underline{3{,}7}}$$

f) f' ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. (s.o.)
Deshalb ist f auf $\mathbb{R}$ umkehrbar.

$D_f = \mathbb{R} = W_{f^{-1}}$
$W_f =]0;2[= D_{f^{-1}}$

<u>Aufgabe 2</u>

$x \in [0;4]$

a) <u>ges:</u> Wachstum in den ersten 2 Monaten

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= \frac{2e^2}{e^2+9} = 0{,}9 \\ f(0) &= 0{,}2 \end{aligned}\right\} \quad 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Die Sonnenblume ist in den ersten 2 Monaten um 0,7m gewachsen.

FS-Abi 2012 - I - Teil 2

b) $f(x) = 1{,}5$

$$\frac{2e^x}{e^x + 9} = 1{,}5 \quad | \cdot (e^x+9)$$

$2e^x = 1{,}5 \cdot (e^x + 9)$

$2e^x = 1{,}5e^x + 13{,}5 \quad | -1{,}5e^x$

$0{,}5e^x = 13{,}5 \quad | \cdot 2$

$e^x = 27 \quad | \ln$

$x = \ln 27 \approx 3{,}3$

Nach 3,3 Monaten ist die Sonnenblume 1,5m hoch.

graphische Lösung: siehe Zeichnung
Bei $y = 1{,}5$ nach rechts bis zum Graphen gehen, dann senkrecht nach unten, $x = 3{,}3$ ablesen.

c) Aus dem Diagramm.
Die größte Steigung hat G_f im Bereich von $x =$ 2 bis 2,5, also hat die Blume nach 2 bis 2,5 Monaten das schnellste Wachstum.

$$m \approx \frac{0{,}5}{1} = \frac{50\text{ cm}}{30\text{ Tage}} \approx \underline{\underline{1{,}7 \frac{\text{cm}}{\text{Tag}}}}$$

d) $t: y = 0{,}18x + 0{,}2$

2 Wochen = 14 Tage $\approx$ 0,5 Monate,
$t(-0{,}5) = 0{,}18 \cdot (-0{,}5) + 0{,}2 = -0{,}09 + 0{,}2 = 0{,}11$
Nach zwei Wochen wäre die Pflanze des Tangentengleichung nur etwa halb so weit gewachsen wie in natura.

e) I $g_I: y = \dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9} \qquad k \in \mathbb{R}^+$

$g_I(0) = \dfrac{2e^k}{e^k+9} = 0,2 = f(0)$

$\Rightarrow \; 2e^k = 0,2(e^k+9)$

$2e^k = 0,2e^k + 0,18 \qquad | -0,2e^k$

$1,8e^k = 0,18 \qquad | :1,8$

$e^k = 0,1 \qquad | \ln$

$k = \ln 0,1 \approx -2,3$

$g_I(1,65) = f(3,3) = 1,5$

$g_I(1,65) = \dfrac{2\cdot e^{1,65-2,3}}{e^{1,65-2,3}+9} = \dfrac{2e^{-0,65}}{e^{-0,65}+9} \approx 0,1$ ↯ $\neq$

II $g_{II}: y = k\cdot\dfrac{2e^x}{e^x+9}$

$g_{II}(0) = k\cdot\dfrac{2\cdot 1}{10} = \dfrac{1}{5}k = 0,2 \Rightarrow k=1$

$g_{II}(1,65) = 1,5$

$g_{II}(1,65) = 1\cdot\dfrac{2\cdot e^{1,65}}{e^{1,65}+9} \approx 0,7$ ↯ $\neq$

f) III $g_{III}: y = \dfrac{2e^{kx}}{e^{kx}+9}$

$g_{III}(0) = \dfrac{2\cdot 1}{1+9} = 0,2 = f(0)$

$g_{III}\left(\frac{3,3}{2}\right) = f(3,3) = 1,5 = \dfrac{2\cdot e^{k\cdot 1,65}}{e^{k\cdot 1,65}+9} \qquad | \cdot(e^{1,65k}+9)$

$1,5(e^{1,65k}+9) = 2\cdot e^{1,65k} \qquad | -1,5\cdot e^{1,65k}$

$13,5 = e^{1,65k}(2-1,5)$

$13,5 = 0,5\cdot e^{1,65k} \qquad | :0,5$

$e^{1,65k} = 27 \qquad | \ln$

$1,65k = \ln 27 \qquad | :3,3$

$k = \dfrac{\ln 27}{1,65} \approx \underline{\underline{2}}$